电枢公式

电枢公式

问题

简介

电枢公式用于处理等步周期问题

核心符号$\left (|\frac{k}{n} \right)$与概念

电枢公式是循环群的一个视角

图片

图1

图2

图3

图4

公共约定

约定1

约定2

约定3

定义1

定义2

定义2.1

定义3

定义4

定义5

定义5.0.1

定义5.0.2

定义5.0.3

定义5.1.1

定义5.1.2

定义5.2

定义6

定义7

定义8

定义9:可达

定理1(电枢公式)

定理1.1.0

定理1.1.0

定理1.1.1

定理1.2

定理1.3

定理1.4

定理1.5

定理1.6

    约定1: 下面证明中的各种运算,均在模n内进行

定理1.7

定理2

定理3

$素数p,(a,p)=1 \longrightarrow \left (|\frac{a}{ap}\right)=a N_p$

定理4

定理4.1

定理4.2

定理5

定理6

定理6.0.1

定理6.1

定理6.2

  方法1

  方法2

定理7

定理8

定理8.1 可达定理

定理9

定理10

定理10.1

定理11

推论1:

定理11.1:

电枢公式新绕法扩展

图1

定义10

定义11

定理12

定理13

抽象电枢公式

定义14

定理14

电枢公式的代码验证

答案

电枢公式

电枢公式.pdf

电枢公式.yuque

问题

12槽电机中,

P1: 为什么3与9是同绕的?为什么4与8是同绕的?是什么性质让他们是同绕的?

P2: 为什么5是全可达的?

P3: 是不是质数都是全可达的?

P4: 哪些绕法能绕到8?

P5: 有几种绕法能绕到8?

P6: 有几种绕法与8是同绕的?

P7: 与8不同绕的绕法能不能绕到8?

P8: 用8最少绕几次能回到起点?

P9: 8能绕到的最小数是多少?

P10: 8绕多少次能绕到这个最小绕数?

P11: 8 能不能绕到1?

P12:　11绕几次能绕到1?
P13:　哪些绕法能绕到1?
P14:　为什么建议齿轮间的齿数尽量互质?
P15:　绕法8第一次回到起点后,共绕了几圈?
电枢公式会从零到1清晰的解释这几个问题,答案放在文章末尾

简介

电枢公式用于处理等步周期问题

电枢公式讨论的是循环等步转圈问题。循环等步就是线性绕法，这种绕法最常用也最简单。电枢公式讨论线性绕法下的 同绕关系，阶，可达 以及一些同绕恒等式，至于非线性绕法会使问题变得复杂与难以处理,分析中非线性问题常常使用线性近似的方式处理，但数论中极少出现近似的词。第t步绕到f(t)处,对于一般的非线性绕法的可达数，不一定会均匀分布在圆盘上,甚至没有稳定的形状,但f(t)=k*t这种线性绕法有着很多好的性质

大多数人都会遇到的类似电枢绕线的场景，但有担心绕不到，担心绕乱的困扰。电枢公式清晰深刻的揭示了等步电枢绕线中的数学规律。

电枢公式可以作为一个数学模型，用来解决等步周期类的问题

核心符号 $\left(|\frac{k}{n}\right)$ 与概念

与 n 最大公约数相同的数集 ,对应一类等价的电枢绕法， "相同最大公约数"这个概念非常重要和有用，所以有必要给它一个符号 $\left(|\frac{k}{n}\right)$,和一种等价关系 – 同绕关系，意思是与n 最大公约数 等于 k 与n的最大公约数 组成的集合,显然 (n,k) 是这个集合的最小数(最小绕数)．电枢公式与欧拉函数 ψ(x) 有关，欧拉函数解决与n互质的数有多少个，电枢公式能解决与n互质的数有哪些 定理4

电枢公式是循环群的一个视角

电枢绕线问题是一个有限循环群问题，这是一个已经被完全解决的问题,但结果都比较零散,缺乏一些顺手的,实用的公式,我围绕电枢绕线来讨论.电枢公式是理解循环群的一种新视角,另一个视角是与旋转,翻转相关的 平面反转群

彻底理解电枢公式需要一些基本的初等数论知识这里有个初等数论简明教程,列举了我觉得比较重要的几个定理的证明．为了让电枢公式更接近实际情况我会对电枢公式稍做扩展，先了解一下 电枢是怎么练成的

参考 电枢公式视频 https://www.bilibili.com/video/BV1mJ41197Jv

图片

图1

图2

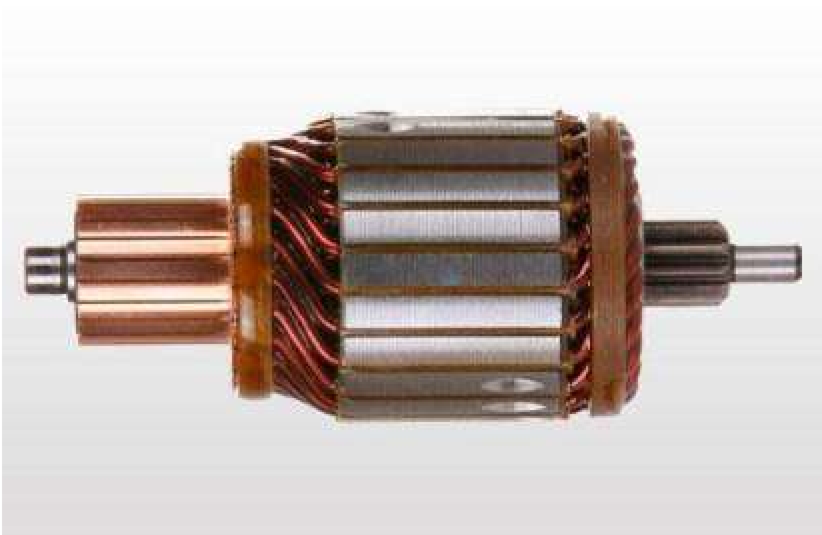


图3

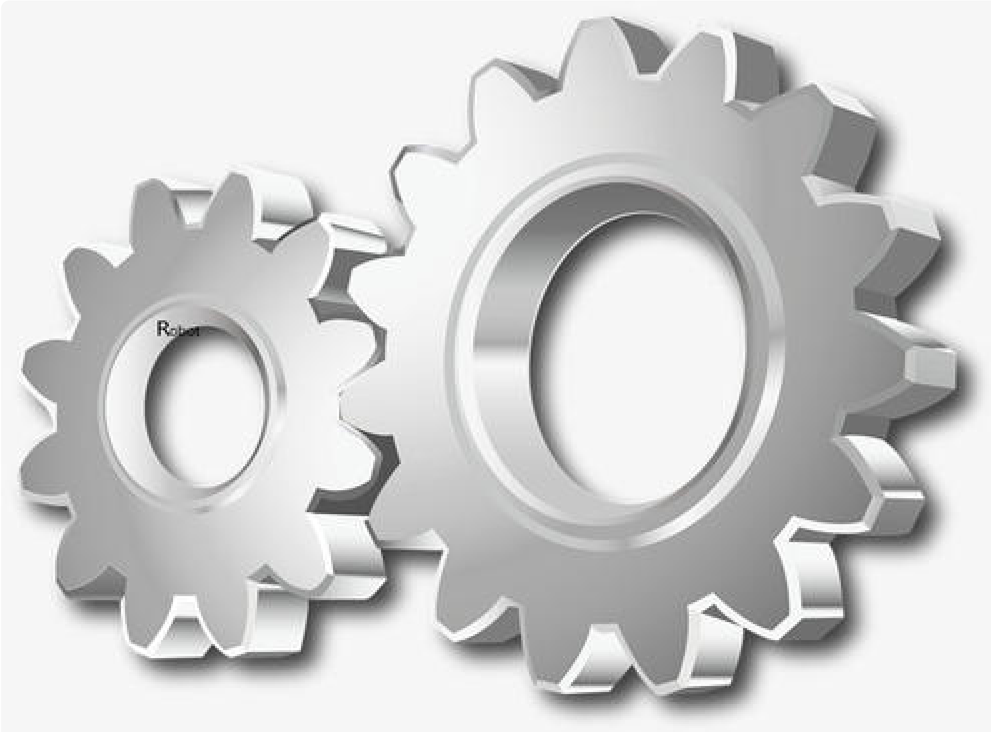
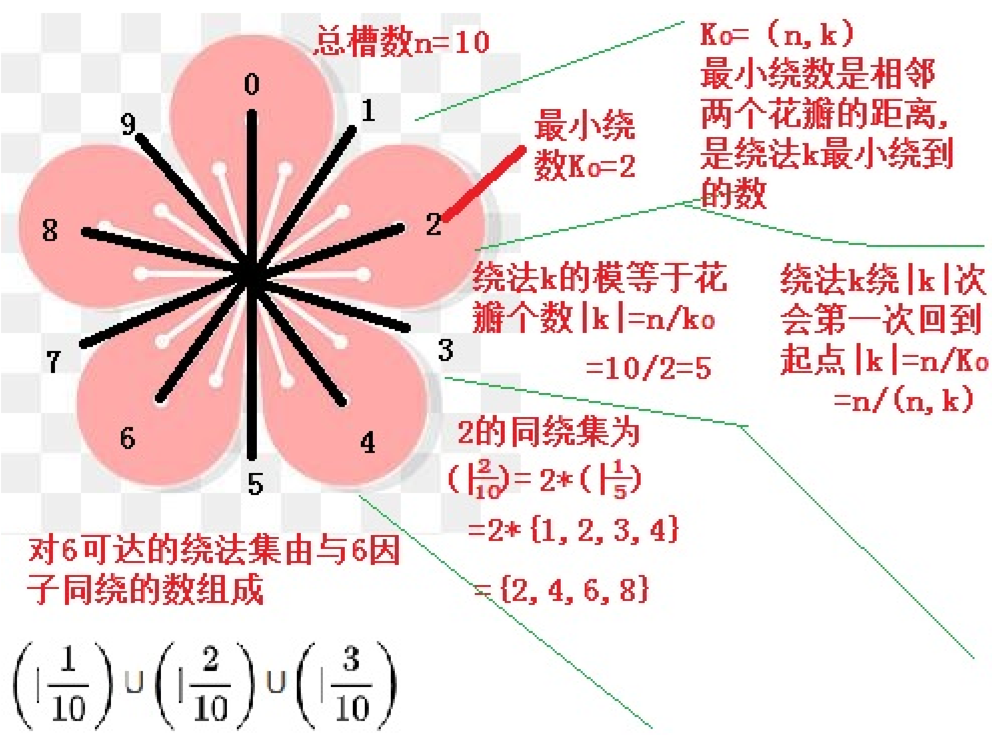


图4


总槽数n=10
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
Ko=（n,k）
最小绕数是相邻两个花瓣的距离，是绕法k最小绕到的数
最小绕数Ko=2
绕法k的模等于花瓣个数|k|=n/ko
=10/2=5
绕法k绕|k|次会第一次回到起点|k|=n/Ko
=n/(n,k)
2的同绕集为
$(|\frac{2}{10}) = 2*(|\frac{1}{5})$
=2*{1,2,3,4}
={2,4,6,8}
对6可达的绕法集由与6因子同绕的数组成
$\left(|\frac{1}{10}\right)\cup\left(|\frac{2}{10}\right)\cup\left(|\frac{3}{10}\right)$

公共约定

约定1

N_p = {x|x∈N ∧ x<p}

约定2

n槽电枢,用0,1,2,...n−1, n个数字标记槽,共n个槽,起始位置定为0,

绕法k按照槽号增加的方向绕,如图4

约定3

汇总一下本文的符号与对应的名称(n槽电枢中)

P1:	$\left(\vert\frac{k}{n}\right)$	(k的同绕类)
P2	(|n)	(n的绕法集)
P3:	k	(绕法k)
P4:	k_0	(绕法k的最小绕数)
P5:	k_1	(绕法k的最小盖数)
P6:	|k|	(绕法k的阶)
P7:	k^{-1}	(绕法k的逆)
P8:	$\vert k\vert_s$	(绕法k对槽s的阶)
P9:	k_q	(绕法k的商)
P10:	k_r	(绕法k的余数)
P11:	$\underline{k+m}$	(绕k空m的绕法)

定义1

$$\left(\vert\frac{k}{n}\right)=\{x\vert(n,x)=(n,k)\wedge x<n\}$$

定义2

绕法: 绕法用希腊字母τ表示。 第t步落入f(t)槽,那么f(t)就确定了一种电枢绕法,不过本文仅讨论τ=f(t)=kt的情景，绕法τ由总槽数n与步长k两个数字确定

等价绕法: 经过相同槽的绕法称为等价绕法,

同绕关系: 等价绕法互为同绕关系

注意绕法τ1 与 τ2为等价绕法，只是说明两种绕法能经过的槽是一样的，与经过槽的频率,概率,顺序无关，只是两种绕法的可达图看上去是一样的,同绕关系是两种绕法间的二元关系 .但绕法τ=kt 与数字k是一一对应的,所以绕法 τ=kt可以简单的说成绕法k,同绕关系也可说成两个数字间的关系(定义4)。

举例: 12槽电机　1 和 11 为等价绕法,因为两种绕法都能把槽绕满

定义2.1

槽:　　电枢凹下去沟道的称为槽

线圈: 两个槽之间的一个有向箭头叫做一个线圈，这里不考虑物理线圈的环状性质,只考虑线圈的两个边

入槽: 线圈射入的槽称为线圈的入槽

出槽: 线圈射出的槽称为线圈的出槽

盖槽: 线圈盖住的槽叫线圈的盖槽, 注意 出槽不是盖槽,入槽是盖槽,出槽与入槽之间的全是盖槽

阶:　　第二次以0为出槽时所用的线圈数叫做绕法的阶

定义3

$$(|n)=\{\, (|\tfrac{x}{n}) \,|x<n\ \}$$

定义4

同绕关系: （n,k）=(n,x) 称x与k关于n互为同绕关系，记作 x~k

> 这个不像是定义,而更像是定理，见定理7

同余关系是同绕关系的子关系, 即可以从a,b同余推出a,b同绕，同绕比同余条件宽松。

电枢绕转问题并不需要同余那么强的条件。

同绕关系与同余关系类似都是等价关系，只是同绕关系因条件宽松而使它没有同余关系那么好的运算性质

定义5

最小绕数: (k,n)称为**k对n的最小绕数**,即k能绕到的最小数，记作k_0,而n/k_0　称为k对n的阶记作 |k|,

可以发现　n=最小绕数*阶,

即: $n=k_{0*}|k|$

阶由最小绕数唯一确定，阶相等或最小绕数相等的两个数是同绕的，反之不同绕
绕法k最小饶数的倍数叫做绕法k的绕数或可达点

定义5.0.1

阶: n槽电枢,绕法k第一次回到0后,绕的次数叫做**k对n的阶**,记作 |k|, $|k|=n/(n,k)=n/k_0$
这个是一个特殊的阶即对0阶 $|k|_0$,也是绕法的默认阶,后面还有对其他槽的阶.

注意阶的符号与绝对值一符多意了,因为有限的符号不可能对无限的意义建立起一一对应,数学上一符多意很常见,一定要做到脑纸分配,否则会引起理解与推理的混乱

定义5.0.2

最小盖数: n槽电枢,绕法k第一次回到0后，每个槽被盖住的次数叫做绕法**k对n的最小盖数**,或者说
绕法k第一次回到0后,走的圈数叫做k的最小盖数,绕法k回到0时绕的圈数统称为**盖数**
记作k_1，$k_1=k/(n,k)=k/k_0$
绕法k的盖数越大说明绕的效率越低，n因子的盖数都为1,只需转一圈就可以回到0
绕法k最小盖数的倍数叫做绕法k的盖数
P1: n槽电枢,绕法k第一次回到0后,经历的槽数为$k*|k|=k*n/(n,k)=n*k/(n,k)=n*k_1$,所以绕法k第一次回到0后共走了$k_1$圈

定义5.0.3

商与余数：n槽电枢,绕法k对n的带余除法$n=k*q+r$ ($r\in[0,k-1]$)中q与r叫做绕法k的商与余数分别记作k_q与k_r
即 $n=kk_q+k_r$,
因为出槽不是盖槽,计数时在前面补充一个0槽(0与7是重合的),在用绕法k计数时,每个被计对象都会被盖一次。
下图 7=3*2+1
0 1 2 3 4 5 6 7

定义5.1.1

电枢的阶: n槽电枢的阶为n,即电枢的总槽数称为电枢的阶,阶在有些场景下称作模,但为描述清楚,电枢的阶一般称为总槽数

定义5.1.2

绕法对槽阶：n槽电枢,绕法k第一次绕到s,绕的次数叫做k对s的阶,记作$|k|_s$,只有绕法k对s可达才会存在$|k|_s$,否则$|k|_s=\infty$，绕法k_0对k的阶正是前面的盖数，比较常用记做k_1，即$k_1=|k_0|_k=k/(n,k)=k/k_0$这些记号都是约定俗成

注意$|k|_0$一定存在,任意绕法对0可达,因为大不了我绕k*n次

定义5.2

逆：n槽电枢,绕法k第一次绕到1,绕的次数叫做k对n的逆,记作 k^{-1}

绕法k的逆就是绕法对1的阶 $k^{-1}=|k|_1$

定义6

最小绕数集：n全体最小绕数组成的集合,除非特殊声明，在大多数场合与定义3不加区分也记作（|n）

注意: n的最小绕数集就是下面定义8的标准同绕系

定义7

同绕类：如果去掉k<n的限制，并且定义 $\left(|\frac{0}{n}\right)$ ={0}，同绕关系对N_n划分构成一个个同绕类，但是n倍数的绕法我们一般不会关心，因此后面讨论，若不显示说明,则会把0的舍去。

（n,k）是集合 $\left(|\frac{k}{n}\right)$ 的最小元素，即k的最小绕数k_0,由于同绕关系是等价关系，所以一个同绕集只需研究最小绕数即可

由定义一可知

$\left(|\frac{k}{n}\right)$ 就是k对n的一个同绕类，这个同绕类的元素全都是k最小绕数k_0 =（n,k）的倍数 **(定理1.1)**

因为一个 同绕类 与 绕法 是一一对应的，所以定义3 （|n）有时指n 的所有绕法集，有时又指n的一个同绕系，

同绕系与绕法集是等价的，（|n）的意义应在具体场合具体分析,做到科学的脑纸分配

定义8

在自然数中筛选出一组n的所有绕法集，这样一组完备且不相交的绕法集称为n的一组同绕系。

或者说

在n的一组完备的同绕类族里每个同绕类随便抽取一个元素组成的集合称为n的一组同绕系。

类比剩余系，由于 k 与 t*n+k 同绕，因此可以在小于n的范围内找到一组n的同绕系，并且如果选择同绕类的最小绕数作为同绕系的元素，则称这个同绕系为标准同绕系

注意：

n的一个同绕系必然包含n槽电机的所有绕法，n的一个同绕系内的元素必然是彼此不同绕的，

同绕不同于同余，即便在小于n的范围内,同绕系的选取也有多个，根据定义3可知,小于n内选取同绕系，共有

$$\prod_{s\in(|n)} |s| \quad 种方案$$

例1：

求6的标准同绕系 （定理8有更好的办法）

P1：先求6的所有同绕类

$\left(|\frac{1}{6}\right)$ ={1，5}

$\left(|\frac{2}{6}\right)$ ={2，4}

$\left(|\frac{3}{6}\right)$ ={3}

因此6的同绕类只有3个{1，5}，{2，4}，{3}，这3个同绕类是N_6的一个划分

选取同绕类的最小元素得到

6的标准同绕系为 （|6）={1，2，3}

这个结果正好验证了定理8, n的标准同绕系就是n的因子集。

定义9:可达

可达:绕法τ可以到达的槽叫可达槽，对应的槽号叫τ的可达数,或τ的可达点或叫τ的绕数

定理13解决了 绕法τ是否对某个数可达，如果可达

计算对应阶的方法.

只要这个数是最小绕数的倍数那么这个数就是可达的，同绕集中对不同槽的阶不同，需要用定理13求解.

可达集:绕法τ可达数,组成的集合

可达图:绕法τ可达点形成的图形叫可达图

线性绕法的可达图一定是均匀分布在圆上,槽数n确定时可达图的种类与同绕系的模一样多，与模n的因子个数一样多

全达(全可达):如果所有槽,绕法τ都是可达的，那么称τ是全达的，一般非线性绕法τ的全达问题需要逐槽验证

1很明显是全达的，其实与总槽数互质的数都是全达的

定理1的电枢公式将所有的线性绕法转换成对应的全达绕法,乘以一个叫最小绕数的系数

细心的同学会发现,大电枢在使用绕法k绕转过程中,那些不可达点永远不会绕到,将这些不可达点全部删掉,就得到了小电枢,大电枢 $\left(|\frac{k}{n}\right)$ 的任意可达点s,对应小电枢 $\left(|\frac{1}{\frac{n}{(n,k)}}\right)$ 的槽s/k_0,电枢公式描述了这两个大小电枢间的关系

这样看电枢公式就像两个大小齿轮，两个齿轮的系数比为最小绕数。

大电枢的绕法k　　对应　小电枢的绕法k_1

大电枢的绕法k_0　　对应　小电枢的绕法1

大电枢的阶n　　对应　小电枢的阶|k|

大电枢的槽s　　对应　小电枢的槽s/k_0

大电枢的x　　对应　小电枢的 x/k_0

大电枢的不可达点x　无法对应 小电枢的x/k_0，故x可达 ⇒ x/k_0 必然是整数

所以可以说大电枢是小电枢的k_0倍

定理1(电枢公式)

$$\left(|\frac{k}{n}\right) = (n,k) * \left(|\frac{1}{\frac{n}{(n,k)}}\right)$$

P1 :　$\forall x \in \left(|\frac{k}{n}\right)$　**⇔　(n,x)=(n,k)**

P2:　$\left(\frac{n}{(n,k)}, \frac{x}{(n,k)}\right) = 1$

P3:　$\frac{x}{(n,k)} \in \left(|\frac{1}{\frac{n}{(n,k)}}\right)$

P4:　$x \in (n,k)\left(|\frac{1}{\frac{n}{(n,k)}}\right)$

P5:　$\left(|\frac{k}{n}\right) = (n,k) * \left(|\frac{1}{\frac{n}{(n,k)}}\right)$

电枢公式 直观理解就是（n,k)=（t*(n,k） ,n ）则需要（t, n/(n,k))=1 才行，只要　t ∈ $\left(|\frac{1}{\frac{n}{(n,k)}}\right)$　就行

电枢公式的意义在于它可以将所有的电枢绕法全都转换为 绕满问题，　绕满问题 就是互质问题,

注意 质数阶电枢一定能绕满，但绕满不一定是质数,只要步长与阶n互质

从电枢公式可知k的同绕集与 k的阶 n/(k,n)

的全达集是一一对应的，这样就把大电枢转换成了小电枢.
例1

12以内 哪些数与12的最大公约数 与4一样?

$$\left(|\frac{4}{12}\right)=(12,4)*\left(|\frac{1}{\frac{12}{(12,4)}}\right)=4*\left(|\frac{1}{3}\right)$$ =4*{1,2}={4,8}

定理1.1.0

同绕集里的元素一定是它们最小绕数的倍数

因为同绕集里的数有着**相同的最小绕数** 并且 (n,k)|k，这个命题的反命题是不成立的
比如12槽中，4是2的倍数，但4与2并不同绕

6有3个同绕集 {1，5}，{2，4}，{3}
显然符合定理1.1

定理1.1.0

~是同绕关系 若 x~k , t ∈ $\left(|\frac{1}{\frac{n}{(n,k)}}\right)$ 则 tx ~ k,

定理1 给出了求k同绕集的方法
定理8 给出了求标准同绕系的方法

定理1.1.1

只有全达绕法存在逆,两个特殊的全达绕法的逆 1^{-1}=1, $(n-1)^{-1}$=n−1

只有全达绕法能绕到1, 1是正时针绕1次,绕到1, (n−1)是逆时针,绕(n−1)次

定理1.2

绕法k,第一次绕到k_0,绕的次数等于 |k|槽电枢中,绕法k_1的逆

证法1
电枢公式用两个齿轮一一对应的方式说明
P1: $\left(|\frac{k}{n}\right)=k_0*\left(|\frac{1}{|k|}\right)$

P2: $\left(|\frac{k}{n}\right)=\left(|\frac{k_0}{n}\right)$

P3: $\left(|\frac{k/k_0}{|k|}\right)=\left(|\frac{k_1}{|k|}\right)=\left(|\frac{1}{|k|}\right)$

P4: 因为P2是P3的k_0倍，P2中绕k次，P3中绕k/k_0次，当P3中的 k/k_0 绕到1,恰好P2中的k绕到k_0

证法2

令 $kx\equiv k_0 \bmod n$,两边都除以k_0

$(k/k_0)x\equiv 1 \bmod |k|$

定理1.3

齐次性

$$a\left(|\frac{k}{n}\right)=\left(|\frac{ak}{an}\right)$$

直接带入电枢公式

定理1.4

并和与笛卡尔和都有

$$a(\left(|\frac{k_1}{n_1}\right)+\left(|\frac{k_2}{n_2}\right))=a\left(|\frac{k_1}{n_1}\right)+a\left(|\frac{k_2}{n_2}\right)$$

集合的性质

定理1.5

模ab内的笛卡尔和具有如下性质

(a,b)=1 => $\left(|\frac{1}{ab}\right)=b\left(|\frac{1}{a}\right)+a\left(|\frac{1}{b}\right)$

见定理10.1

定理1.6

(|a|,|b|)=1 ⇒ |a+b|=|a|*|b|

约定1: 下面证明中的各种运算,均在模n内进行

12槽电枢中,|3|=4,|4|=3,　|3+4|=|7|=|3|*|4|=12=|1|

P1:　n=s(a+b)　　(|a+b|=s)

P2:　n=s(a+b)|a|=sb|a| =>　|b|　|　s|a|　=> |b| | s

P3: 与P2同理　|a| | s

P4: [|a|,|b|]=|a|*|b| | s　=> |a|*|b|　|　|a+b|

P5: (a+b)*|a|*|b|=a*|a|*b+b*|b|*a=(a+b)n　=>　　|a+b|　|　|a|*|b|

P6:　|a+b|=|a|*|b|　　| p4,p5

定理1.7

n槽电枢,n=ks，则$k=k_0$,$s=s_0$,|k|=s,|s|=k

P1:n=ks,ks是对称的,只证$k=k_0$,|k|=s

P2:(n,k)=k　->　k_0=k, |k|=n/k_0=n/k=s

定理2

素数p,　　$(|\frac{1}{p^k}) = Np^k - pNp^{k-1}$

就是把含有因子p的数都给去掉

定理3

$$\text{素数}p, (a,p) = 1 \longrightarrow \left(|\frac{a}{ap}\right) = aN_p$$

直接带入电枢公式即可

推论

取a=1,可得素数阶电枢,无论怎么绕总能绕满所有槽

定理4

$$\left(|\frac{1}{p_1^{\alpha1} p_2^{\alpha2}}\right) = \quad Np_1^{\alpha1} p_2^{\alpha2} - (p_1 N_{p_1^{\alpha1-1} p_2^{\alpha2}} \bigcup p_2 N_{p_1^{\alpha1} p_2^{\alpha2-1}})$$

定理4.1

$$\left(|\frac{1}{p_1^{\alpha1}p_2^{\alpha2}...p_t^{\alpha t}}\right)=Np_1^{\alpha1}p_2^{\alpha2}...p_t^{\alpha t}-\bigcup_{i=1}^{t}p_i*Np_1^{\alpha1}p_2^{\alpha2}...p_i^{\alpha i-1}...p_t^{\alpha t}$$

P1: 定理4的直接推理

定理4.2

a,b 为素数 => $\left(|\frac{1}{ab}\right)=b\left(|\frac{1}{a}\right)+a\left(|\frac{1}{b}\right)$ **=** $N_{ab}-(b\left(|\frac{1}{a}\right)\bigcup a\left(|\frac{1}{b}\right))$

P1：定理1.5+定理4

a,b为素数时，并和U 与 笛卡尔和+ 对函数 $z=x\left(|\frac{1}{y}\right)$ 的轮换和 关于 Nab 互补

定理5

$$|\left(|\frac{1}{p_1^{\alpha1}p_2^{\alpha2}...p_t^{\alpha t}}\right)|=p_1^{\alpha1}p_2^{\alpha2}...p_t^{\alpha t}\prod_{i=1}^{t}(1-\frac{1}{p_i})$$

这是 欧拉公式的推论 $|\left(|\frac{1}{n}\right)|=\varphi(n)$

定理6

n 槽电枢，每次绕k个槽，最少绕 $\frac{n}{(n,k)}$ 次能回到起点

这个定理揭示了定义5 最小绕数与阶的物理意义

这个就是群的阶定理|a|=n –> |a^k|=n/(n,k)

P1 : n | $\frac{n}{(n,k)}$ *k

P2: n | t*k

P3: $\frac{n}{(n,k)}$ | t $\frac{k}{(n,k)}$

P4: $\frac{n}{(n,k)} \mid t$

例1

1袋粽子有4个, 14个粽子可以装一箱,最少买多少袋粽子可以正好装满整箱

这个问题就是求4对14的阶，用14除以4的最小绕数即可

P1: 14/(4,14)=7 因此最少买7袋粽子能正好装满整箱

定理6.0.1

$|k|=|k_0|=|k|_0$

因为k与k_0同绕，所以他们形成的花瓣个数一样,即阶一样

定理6.1

总槽数n1,n2的两个齿轮,总的状态数为[n1,n2],当(n1,n2)=1时,可出现任意状态,此时n1与n2相互全达,此时磨损最均匀

约定1: n1_k表示齿轮n1的第k个槽

约定2: n2_k表示齿轮n2的第k个齿

约定3: 符号 k1_k2 表示齿轮n2的第k2个齿卡住齿轮n1的第k1个槽

约定4: 初始状态为 0_0,齿轮按两者齿槽增长方向旋转

约定5: 第二次达到状态为 0_0时则称 绕过了一个绕转周期

P1: 如果n1的任意一个槽可被n2的任意一个齿卡住则磨损是均匀,因为齿轮启动时受力最大,磨损最严重,
假设n1_k1与n2_k2两个齿槽磨损了,状态k1_k2,如果出现的概率大,就会加快齿轮磨损

P2: 由n1,n2的对称性,以n1作为参考系,问题转换为槽数为n1的电枢问题,n2旋转一周相当于用绕法n2绕了n1一次

P3: n2转|n2|圈正好经过一个绕转周期,绕过的总齿数为n2*|n2|=n2*(n1/(n1,n2))=n2*n1/(n1,n2)=[n1,n2]
当(n1,n2)=1时,n2便是全达绕法,n2_0能卡到n1的任意一个槽,同理n2的其他齿也都能卡到n1的任意一个槽

例1

n1=3,n2=2的总状态数为[3,2]=6,停到0_0的概率为1/6

0_0,

1_1,

2_0,

0_1

1_0

2_1

例2

n1=4,n2=2的总状态数为[4,2]=4,停到0_0的概率为1/4

0_0,

1_1,

2_0,

3_1

定理6.2

n1,n2,...ns， s个齿轮两两卡合，则总状态数为[n1,n2,...,ns]

这个定理对用多个霍尔来定位转子位置，有参考价值

方法1

用数学归纳法证

P1: s=2 ok |定理6.1

P2: s=k-1 ok | 归纳假设

P3: s=k,把n1当参考系,使用n2,n3,...nk来绕n1,

n2,n3,...nk自身的绕转周期为[n2,...,nk] (P2)

n2,n3,...nk的一个绕转周期相当于绕了n1一次,问题转换为两个齿轮绕转

故总的的绕转状态为

[n1,[n2,...,nk]]=[n1,n2,...,nk],故**s=k ok**

方法2

从轮换角度看,因为不相交轮换乘积的阶为各个因子阶的最小公倍数。

P1: n1每旋转一个槽,其他齿轮都会跟着旋转一个,问题转换为n1最少旋转多少槽才能让所有齿轮恢复初始状态

P2: 可能的答案一定是n1,n2..nk的倍数,最小的答案的自然是[n1,n2...nk]

例1

n1=2,n2=2,n3=4的总状态数为[2,2,4]=4

0_0_0,

1_1_1,

0_0_2,

1_1_3

定理7

n槽电机,（x,n)=(y,n） <=> x与y 是等价绕法

这个定理就是定义1的由来,证明可以参看循环群阶定理,这里用自然语言描述证明

P1: 第一次回到起点，没有绕到的槽，以后也不会再绕到,(因为它会走它以前走过的路)

P2:只要按固定的步长绕线，最后绕到的槽会均匀分布在圆上(因为能绕到的槽地位平等)

P3:第一次回到起点走的步数一样的绕法是等价绕法(P2的推论)

P4: 每次绕k砸，最少绕 $\frac{n}{(n,k)}$ 次能回到起点 (定理6)，$\frac{n}{(n,k)}$ 由 (n,k)唯一确定

所以 (x,n)=(y,n) <=> x与y 是等价绕法

例1: 证明未来存在周三的国庆节

转换为7槽电枢问题，只考虑平年这种绕法,在考虑2000年的大循环中，

1897、1898、1899、1900、1901、1902、1903都是平年,也就是说若干年后一定存在连续的7个平年，而平年365天与1同绕，1是全达绕法，365也是全达绕法，所以这7年的国庆节将均匀分布在每个星期数上.

例2: 3升桶和5升桶怎么打出4升水?

转换为用3绕5槽电枢,因为3是全达绕法,所以可以打出 1,2,3,4,5 升水

3绕5 对应 3升桶往 5升桶里到水，当5升桶满的时候,将5升桶里的水清空(0与5是同一个位置)

直到得到期望的升数。

3升桶	5升桶
3	0
3	3
3	1
3	4

定理8

|(|n)| = n 的因子个数，即 n同绕系中的元素的个数等于n的因子个数，而n的每个因子可作为n各个同绕集的代表元（n的不同因子一定是不同绕的），所以

n的标准同绕系就是n的因子集

P1 S={x|(n,x)|x<n} => |S|=|(|n)|

P2　　　S的元素是n的因子，n的一个因子k=(n,k) 又是S 的元素
P3　　　S就是n的因子集　|S|=|(|n)| =n的因子个数
补充

|(|n)|　表示n槽电机的绕线方式集，而方式 $\left(|\frac{k}{n}\right)$ 里面又有 | $\left(|\frac{k}{n}\right)$ | 种等价方式，

定理 1 –5 都是为了 解决 与 k 的等价绕法 有多少个,有哪些等价绕法

n阶循环群G ， n的每个因子k，唯一的对应一个k阶子群，这个子群 可由 $\left(|\frac{n/k}{n}\right)$ 中的任意元素生成

这个k阶子群就是绕法n/k的可达集

定理8.1 可达定理

可达定理的两种等价描述为

1. 绕法t,可达k的 充要条件是(n,t)|k
2. 只有与k的某个因子同绕的绕法才能绕到k

——

证法1: tx ≡k mod n 有解的充要条件是(n,t)|k

证法2:

只需证明 k1与k的任意因子不同绕,则绕法k1无法达到k,

反证: 假设 绕法 k1绕了t次能到达k，则 k ≡ t*k1=t*s*k1$_0$(定理1.1)

因此 k1与k1$_0$ 都是k的一个因子,k1$_0$ 是k1的最小绕数,自然与k1与k1$_0$同绕，与前提

k1与k的任意因子不同绕矛盾

哪些t能让方程 t x ≡k mod n 有解 一次同余方程的电枢解释参看

https://www.yuque.com/docs/share/8b700dca-54ad-4572-b097-f8cd26b26952?#eqVrG

例1 12槽电枢中,绕法6是否对槽8可达？哪些绕法对8可达

1. (6,12)∤8 –> 绕法6对8不可达
2. 8的因子集为 {1,2,4,8} –> 对槽8可达的绕法集为 $\left(|\frac{1}{12}\right)$ ∪ $\left(|\frac{2}{12}\right)$ ∪ $\left(|\frac{4}{12}\right)$ ∪ $\left(|\frac{8}{12}\right)$

例2:旋转多少整数度数与自身重合的图形是中心对称图形

这个是在求360槽电枢中，对180可达的绕法

即 180因子 同绕的那些绕法,有非常多

定理9

n 槽电机有 ϕ(n)种绕法能够绕满

———

P1　每次绕一个槽显然能绕满,

P2　$\left(|\frac{1}{n}\right)$ 便是 n 槽电机能够绕满的的绕法集

P3　根据定义1　| $\left(|\frac{1}{n}\right)$ |=ϕ(n)

定理10

(a,b)=1 =>　$|\left(|\frac{1}{ab}\right)| = |\left(|\frac{1}{a}\right)| * |\left(|\frac{1}{b}\right)|$　<=>　ϕ(ab)=ϕ(a)ϕ(b)

——

欧拉函数为啥是积性函数，这个证明很简单漂亮

P1: 令 S_{ab}={xa+yb | (xa+yb,ab)=1}　S_a= {y| (y,a)=1}　S_b= {x| (x,b)=1}

P2:　|S_{ab}|= ϕ(ab)　|S_a|= ϕ(a)　|S_b|= ϕ(b)

P3:　(a,b)=1 ∧ (xa+yb,ab)=1　<=>　(y,a)=1 ∧ (x,b)=1

P4:　ϕ(ab)=ϕ(a)ϕ(b)

从定理10可直接的到定理5

定理10.1

(a,b)=1 =>　$\left(|\frac{1}{ab}\right) = b\left(|\frac{1}{a}\right) + a\left(|\frac{1}{b}\right)$　mod ab ,注意等式右侧的+指的是笛卡尔和

定理10.1 的证明与定理10类似S_{ab}正好是所有与ab互质的数组成的集合(不多不少)

例1　使用12验证一下定理10.1

$\left(|\frac{1}{12}\right)$ ={1，5，7，11}

4 $\left(|\frac{1}{3}\right)$ =4{1，2}={4，8}

$3\left(|\frac{1}{4}\right)$ =3{1，3} ={3，9}

{4，8}+{3，9}={7，1，11,5}

定理11

$\left(|\frac{k}{n}\right)$ = $\left(|\frac{n-k}{n}\right)$

P1:（n,k)=(n,n−k)

定理11 说明一个道理，给电枢绕线与方向无关,仅取决于步长，正向每步绕k个槽与逆向每步绕k个槽 实际是等价的

比如

给赤道上修一条马路,并涂上斑马线,用来均匀的分割赤道，无论给赤道分成多少份，每次正着走k步，一定能踩到n−k的斑马线。从定理6 知道 n/(n,k）步可以回到起点，所以 n/(n,k)−1 步 能踩到 n−k的斑马线

扩展一下s的斑马线最少多少步才能踩到？ 这个问题可以用 定理13 阶方程 求解

kx≡s mod n（这个方程有解的充要条件是（k,n)| s，不一定有解,所以s不一定能踩到）

自然语言描述这个现象是

此时我踩到s了 −> 我倒退s步就是起点 −> kx−s ≡ 0 mod n，只是 定理13阶方程 更广泛一些

推论1:

绕法k的同绕集关于可达图的中垂线对称(0与n/2的连线),若k与n/2同绕，则 | $\left(|\frac{k}{n}\right)$ | 为奇数，否则 | $\left(|\frac{k}{n}\right)$ | 为偶数。所以奇数p，因k不可能与p/2同绕，故φ(p) 为偶数，在计算同绕集时只需计算1~n/2 之间的即可,另一半取n的补数即可

例1 证明欧拉公式

$$(a,n)=1 \ \ -> a^{\phi(n)} \equiv 1 \bmod n$$

P1 : $\left(|\frac{1}{n}\right)$ $=\{x_1, x_2, \ldots x_{\phi(n)}\}$ 是n的简化剩余系

P2: $a \in \left(|\frac{1}{n}\right) \Rightarrow a\left(|\frac{1}{n}\right) = \left(|\frac{1}{n}\right)$

P3: $a^{\phi(n)} * x_1 * x_2 * \ldots * x_{\phi(n)}$

$\equiv (a * x_1) * (a * x_2) * \ldots * (a * x_{\phi(n)})$

$\equiv x_1 * x_2 * \ldots * x_{\phi(n)} \bmod n$

P4: $a^{\phi(n)} \equiv 1 \bmod n$

定理11.1:

T1: $$\sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

n 槽电枢中

P1: 由电枢公式知，k的同绕集 $\left(|\frac{k}{n}\right)$ 元素的总个数为$\phi(n/k_0)$

P2: 因为同绕关系划分了N_n,所以划分块元素个数加起来是n

P3: 由P1可知,T1中的每一个$\phi(d)$ 与P2中的一个划分块是一一对应的 ,将这些划分块的个数加起来就是n

例1:

3 = $\phi(1)+\phi(3)=1+2$

12 $=\phi(1)+\phi(2)+\phi(3)+\phi(4)+\phi(6)+\phi(12)=1+1+2+2+2+4=12$

电枢公式新绕法扩展

实际电枢的绕法像下图,是绕几个槽,空几个槽再绕,有叠绕组,波绕组

图1

/\/

\/\
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

定义10

虽然扩展绕法与前面绕法不同,但概念的定义都是一致的

阶: 第二次以0为出槽时所用的线圈数

前面常规电枢公式s成为入槽后,下一步s又会成为出槽,中间没有空隙

s的阶: 绕法 τ 第一次射入s所用的线圈数称为绕法 **τ对槽s的** 阶,记作$|\tau|_s$

绕法τ的逆: 绕法τ对1的阶称为绕法τ的逆,记为τ^{-1}或τ′

关于对槽的阶有 τs 的 阶方程 定理13

定义11

严格上标识 $\left(\Big|\frac{k}{n}\right)$: 可以记作 形如 0~k , k~2k ...... 的绕法

但由于在讨论具体问题时, n是固定的,所以n可以省略 所以用k加下划线来简写

$\underline{k}$: 形如 0~k , k~2k ...... 的绕法

$\underline{k,\ m}$: 形如 0~k , k+1...k+m−1,k+m ...2k+m ...... 的绕法(注意第一个线圈k没有成为出槽,第二个线圈 k+m 没有成为入槽) k是两个相邻入出槽之差, m是相邻出槽或相邻入槽之差

根据定义可知,前面的电枢公式是m=0的特殊情况

$\underline{k}=\underline{k,\ 0}$

$\underline{k,m}$ 这种绕法处理起来不方便, 但可以发现 $\underline{k,m}$ 可以转换为 $\underline{k+m}$,所以可以将$\underline{k,m}$转换为 $\underline{k+m}$ 处理完再转换为 $\underline{k,m}$

定理12

k，m 的阶为n/(n,k+m)

36槽三相电机,18个线圈，一相用6个线圈则要求满足36/(36,k+m)=6
所以k+m=6,否则将绕乱

定理13

绕法k，m 对s的阶方程为

(k+m)x≡s+m mod n

例1

n=12， 3，2 走几步能射入6

P1: 5x≡8 mod 12 => x=4 => 走4步能射入6

3，2 的绕法如下图

0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9

抽象电枢公式

前面 符号 $\left(\left|\frac{k}{n}\right.\right)$ 的意义与最大公约数绑定了,但在推理过程中仅用了齐次性与加减乘除(域)等几个条件,进一步抽象便得到抽象电枢公

式，抽象电枢公式没有很好的物理意义,仅用来简化特定符号的表示

定义14

集合F上的二元函数f,如果满足下面三个条件,则可得到相对应的抽象电枢公式 <F,f,n,1>, 其中二元函数f叫抽象电枢函数,n与1是F中的特异元素,由抽象电枢函数f(n,x)生成的等价关系叫抽象同绕关系

P1：**集合F**上的二元齐次函数满足kf(x,y)=f(kx,ky)

P2：f(y,1)=1

P3：对于 ∀n,k ∈F,存在唯一的q∈**F**,使得n=q*f(n,k)

同理可定义对应的同绕集

$\left(|\frac{k}{n}\right)$ =**{x|f(n,x)=f(n,k)}**

定理1 也相应改为

$$\left(|\frac{k}{n}\right) = f(n,k)\left(|\frac{1}{\frac{n}{f(n,k)}}\right)$$

上面的各种同绕恒等式仍成立。

这三条规则是从定理一，提取出来的

P1　是最基本的,没有P1就一定没有好的性质

P2　源于定理1中 P2到P3 用到了性质 f(x,y)=1　=> x ∈ $\left(|\frac{1}{y}\right)$

P3　是防止 $\frac{n}{f(n,k)}$ 不存在，可扩大定义域让它存在

抽象电枢公式并不要求f中x,y可交换,因为定理1在证明过程中并未用到这个性质

定理14

若抽象电枢函数满足f(1,y)=1,则它一定是由对称表达式来表示的

P1: f(x,y)=y * f($\frac{x}{y}$,1)=y * f(1, $\frac{x}{y}$)=f(y,x)

例1

最常用的，F是整数，f是最大公约数 是性质最好的电枢公式

例2

F是有理系数多项式环,f是最大公因式可构成电枢公式

例3

f 如果是最小公倍数是否可行呢？经过验算不可行,虽然可定义分数的最小公倍数，

[$\frac{q_1}{p_1}$, $\frac{q_2}{p_2}$]=[$\frac{q_1[p_1,p_2]}{p_1}$, $\frac{q_2[p_1,p_2]}{p_2}$] / $[p_1,p_2]$

和分数同绕集

$$\left(|\frac{\frac{q_1}{p_1}}{\frac{q_2}{p_2}}\right) = \frac{1}{p_1p_2}\left(|\frac{q_1p_2}{q_2p_1}\right)$$

但由于不满足P2,所以不能构成电枢公式

例4

F是有理数集，f(x,y)=y,可构成电枢公式

此时 $\left(|\frac{k}{n}\right)$ = {k}，符合电枢公式

例5

F是有理数集，f(x,y)=x+y 不能构成电枢公式，因为不满足P2,由于很多同绕恒等式的证明依赖于定理1，

而定理1 中 从P2到P3 用到了性质 f(y,x)=1 $\Rightarrow$ x $\in$ $\left(|\frac{1}{y}\right)$, f(x,y)=x+y如果这个能成立，

$\left(|\frac{1}{y}\right)$ = {x|f(y,x)=f(y,1)} 必须f(y,1)=1 才行，所以定义12的P2必须满足

例6

F={x|x>=1} f(x,y)=min(x,y) 可构成电枢公式

例7

F=整数集 f(x,y)=y mod x，f(n,x) 生成的等价关系是同余关系,自然符合电枢公式

电枢公式的代码验证

电枢公式的Kotlin验证

答案

12槽电机中，

P1：为什么3与9是同绕的?为什么4与8是同绕的?是什么性质让他们是同绕的?

因为他们的最小绕数相等即 (3,12)=(9,12), (4,12)=(8,12)

P2：为什么5是全可达的?

因为5与12互质,与阶互质的数是全达的

P3：是不是质数都是全可达的?

不是,只有与总槽数互质的数才是全达的

P4：哪些绕法能绕到8?

只有与8因子同绕的数才能绕到8, $\left(|\frac{1}{12}\right) \cup \left(|\frac{2}{12}\right) \cup \left(|\frac{4}{12}\right) \cup \left(|\frac{8}{12}\right)$

P5：有几种绕法能绕到8?

$| \left(|\frac{1}{12}\right) \cup \left(|\frac{2}{12}\right) \cup \left(|\frac{4}{12}\right) \cup \left(|\frac{8}{12}\right) |$

P6：有几种绕法与8是同绕的?

$| \left(|\frac{8}{12}\right) |$ 种

P7： 与8不同绕的绕法能不能绕到8?

有可能,比如2

P8： 用8最少绕几次能回到起点?

|8| 次 ,即 12/(12,8)=3

P9： 8能绕到的最小数是多少?

是(12,8)=4

P10： 8绕多少次能绕到这个最小绕数?

绕2次, 为$8/8_0$ 对|8| 的逆,即2为3的逆,为2

P11: 8 能不能绕到1?

不能,8与12不互质

P12: 11绕几次能绕到1?

绕11次，1与阶减1的逆为其自身,只有全达绕法才有逆

P13:哪些绕法能绕到1?

$\left(|\frac{1}{12}\right)$

P14:为什么建议齿轮间的齿数尽量互质?

因为互质的齿轮可出现两个齿轮状态的任意组合,出现特定状态的概率最低

P15：绕法8第一次回到起点后,共绕了几圈?

绕了2圈，即最小盖数$k_1=k/k_0=8/(12,8)=8/4=2$